МОУ «СОШ № 34 с углубленным изучением
художественно-эстетических предметов»

Серия

«Школьник - школьнику»

Методические рекомендации

В.В. Леваков

Решение заданий С2 ЕГЭ по математике координатно-векторным методом

Вячеслав Леваков

Решение заданий С2 ЕГЭ по математике координатно-векторным методом

Саратов

МОУ «СОШ № 34 с УИП»

2013

ЕЩЕ ОДИН ШАГ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ!

Серия «Школьник - школьнику»

В.В. Леваков

Решение заданий С2 ЕГЭ по математике координатно-векторным методом. Методические рекомендации.

С помощью данных методических рекомендаций можно научиться решать задачи на вычисление углов и расстояний в стереометрии с помощью координатно-векторного метода.

Представленный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций.

Автор выражает огромную благодарность своим учителям математики Айвазян Карене Арташовне, Беляковой Елене Анатольене, Хренниковой Наталье Игоревне, которые сыграли большую роль в формировании его знаний умений и навыков при изучении предмета. Отдельные слова благодарности – Ларисе Анатольевне Денисовой, председателю методического объединения учителей математики Заводского района г. Саратова, которая приняла участие в составлении данной брошюры.

Уважаемый читатель!

Если у ученика 11 класса имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, мне кажется, что стоит заняться изучением координатно-векторного метода. Особенно это актуально в условиях экстренной помощи, когда до ЕГЭ остается всего лишь 2-3 месяца. Данный курс не претендует на научность, а является своеобразным методическим пособием при подготовки к ЕГЭ для выпускника, нацеленного на высокий балл при сдаче экзамена. Курс является кратким, в нем рассмотрены лишь наиболее часто встречающиеся типы заданий, как в сборниках, так и в контрольно-измерительных материалах.

Алгебра - не что иное как записанная
в символах геометрия,
а геометрия - это просто алгебра,
воплощенная в фигурах.

Софий Жермен (1776-1831)

§1. Основные понятия.

Большую роль в развитии геометрии сыграло применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку — аналитическую геометрию. Возникновение аналитической геометрии связано с открытием метода координат, являющегося основным ей методом.

Метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве.

Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. Существует множество систем координат: *аффинная, полярная, биполярная, коническая, параболическая, проективная, сферическая, цилиндрическая* и др. Наиболее используемая из них — прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат). Ею мы и будем пользоваться для решения задач нашего курса.

Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций.

Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Для начала разбора метода координат для стереометрических задач рассмотрим что же представляет собой прямоугольная (декартова) система координат в пространстве.

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве – совокупность точки О (называемой *началом координат*), единицы измерения и трёх попарно перпендикулярных прямых *Ox, Oy* и*Oz* (называемых *осями координат: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат*), на каждой из которых указано направление положительного отсчёта. Плоскости *xOy, yOz* и *zOx* называют координатными плоскостями. Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел, называемых её *координатами*.

Перед решением стереометрических задач координатно-векторным методом стоит запомнить следующие формулы:

1. **Нахождение расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.**

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, *где d=AB, A($x_1$; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)*

2. **Нахождение координаты середины *C(x; y; z)* отрезка *AB*,**

A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ $z=\frac{z_1+z_2}{2}$

3. **Нахождение косинуса, а, следовательно, и самого угла, между двумя векторами, заданными своими координатами.**

$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ где $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\},\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$.

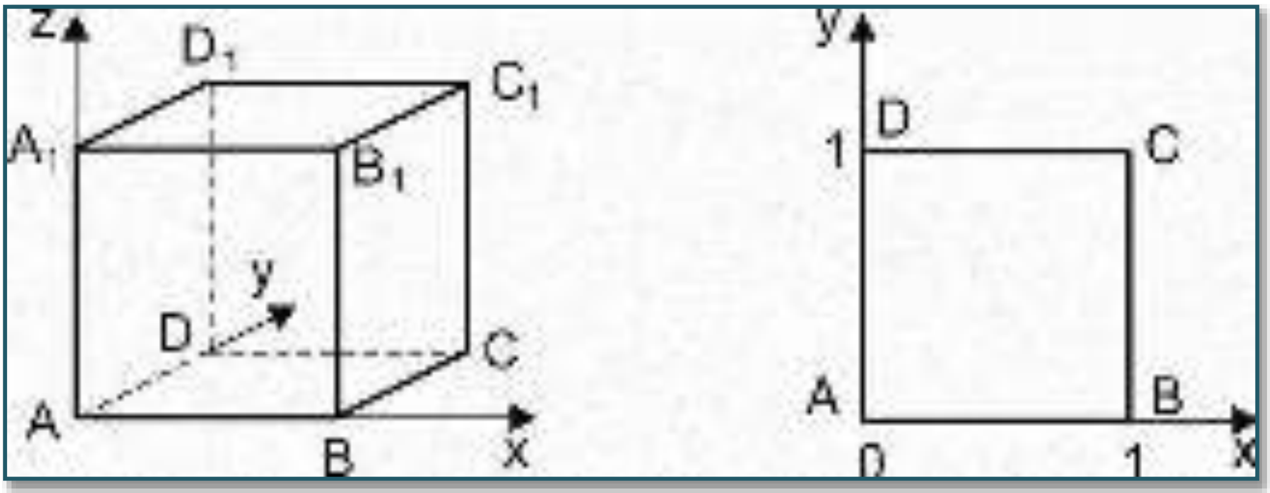
4. Координаты x, y, z **точки** M, **которая делит отрезок** M_1M_2, ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, определяется по формулам

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Для решения задач необходимо научиться находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат.

Ниже представлены координаты вершин некоторых *многогранников*, помещенных в систему координат.

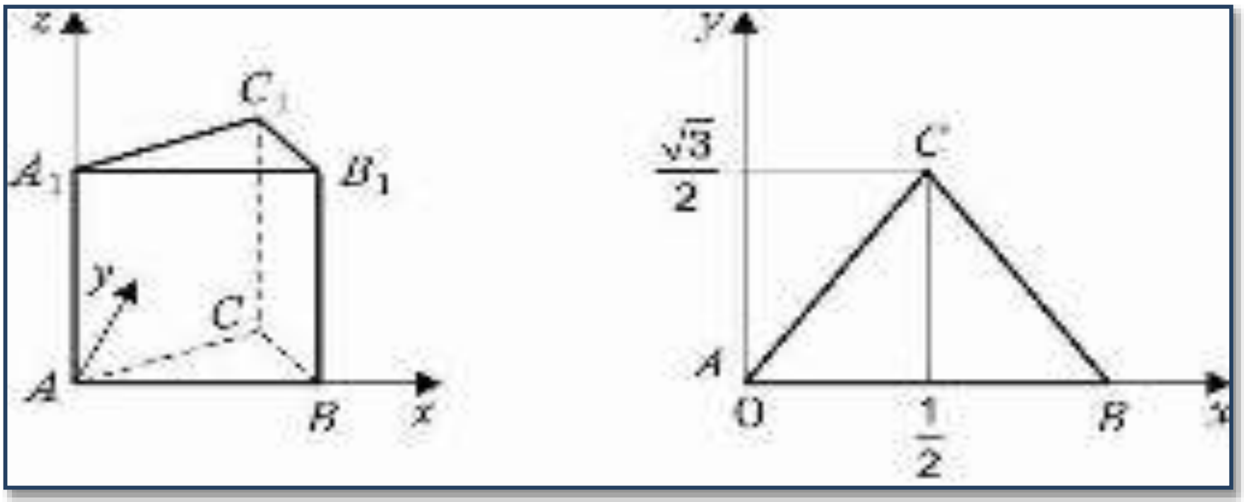
1. Единичный куб A...D₁



Координаты вершин:

A (0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), B_1(1,0,1), D(0 ,1 ,0), D_1(0,1,1), C(1,1,0), C_1(1,1,1).

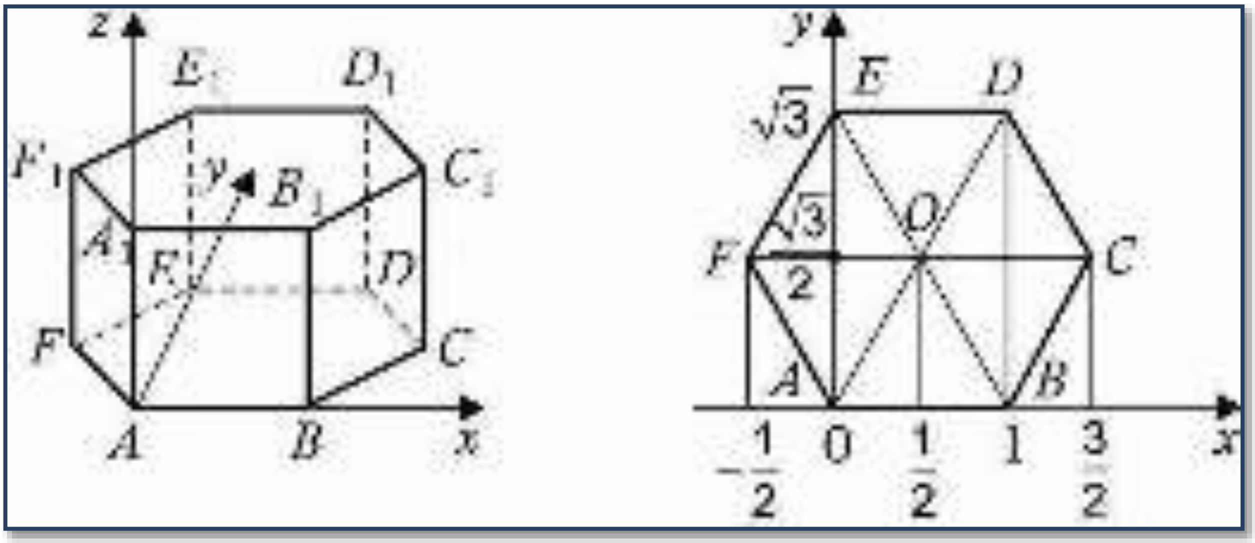
2. Правильная треугольная призма $A\ldots C_1$ **, все ребра, которой равны 1.**



Координаты вершин:

A (0,0,0),A $_1$(0,0,1),B(1,0,0),B$_1$(1,0,1), C(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),C$_1$(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1).

3. Правильная шестиугольная призма A...F$_1$, все ребра которой равны 1.



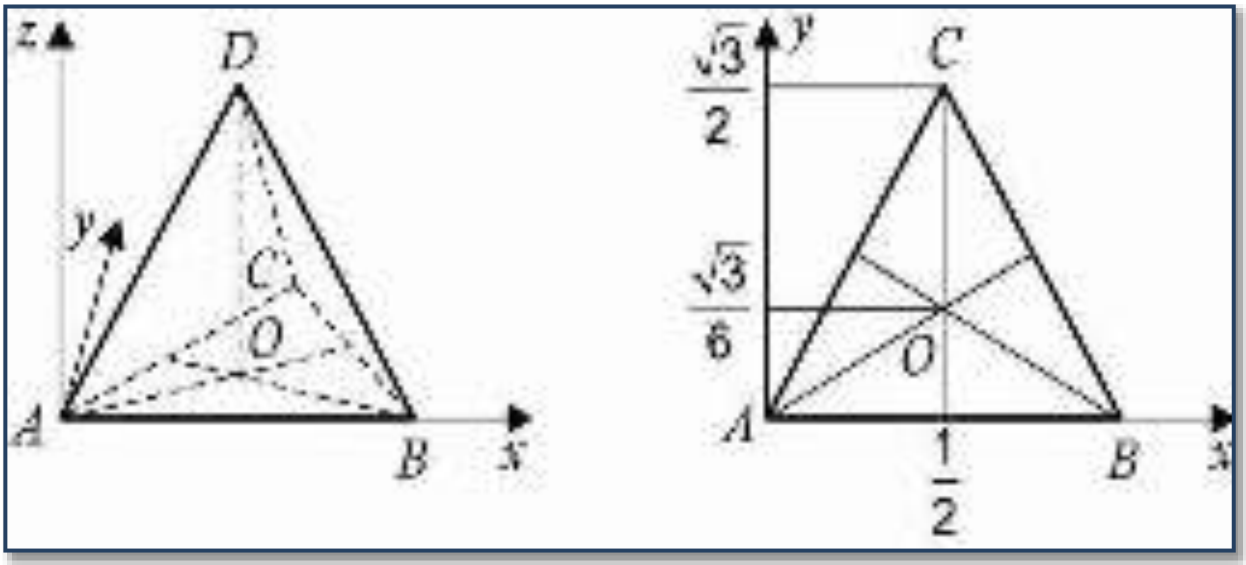
Координаты вершин:

A (0,0,0),A $_1$(0,0,1),B(1,0,0),B$_1$(1,0,1), C(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0),C$_1$(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,1),

D$(1, \sqrt{3}, 0)$, D$_1(1, \sqrt{3}, 1)$, E$(0, \sqrt{3}, 0)$, E$_1(0, \sqrt{3}, 1)$, F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0),

F_1(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1).

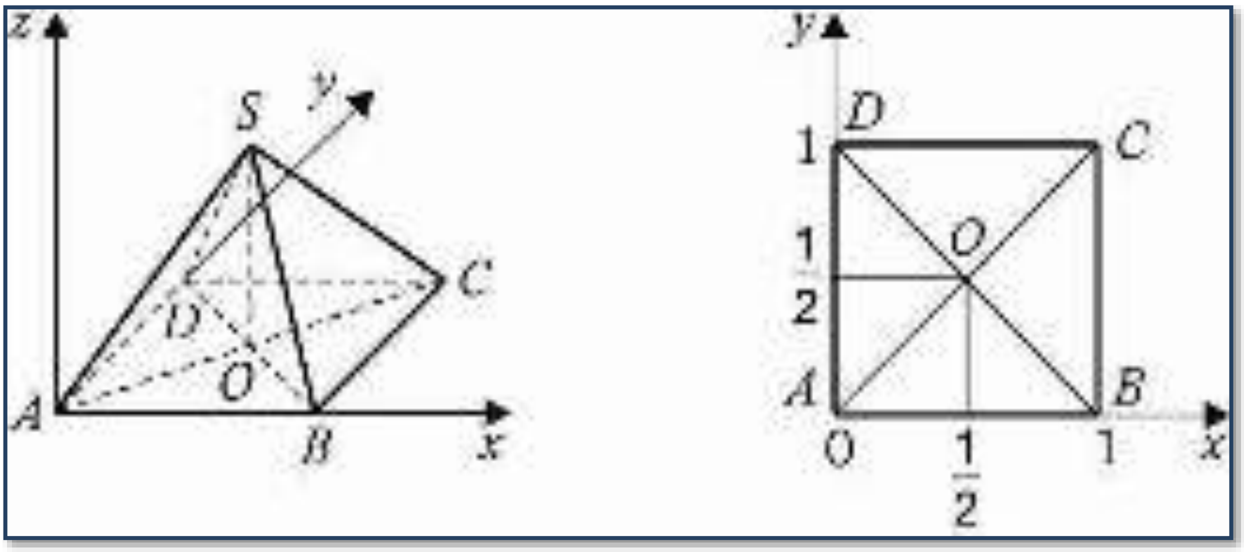
4. ***Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) ABCD все ребра которой равны 1.***



Координаты вершин:

A (0,0,0),B(1,0,0),C(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), D(0,5, $\frac{\sqrt{3}}{6}$,$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$),

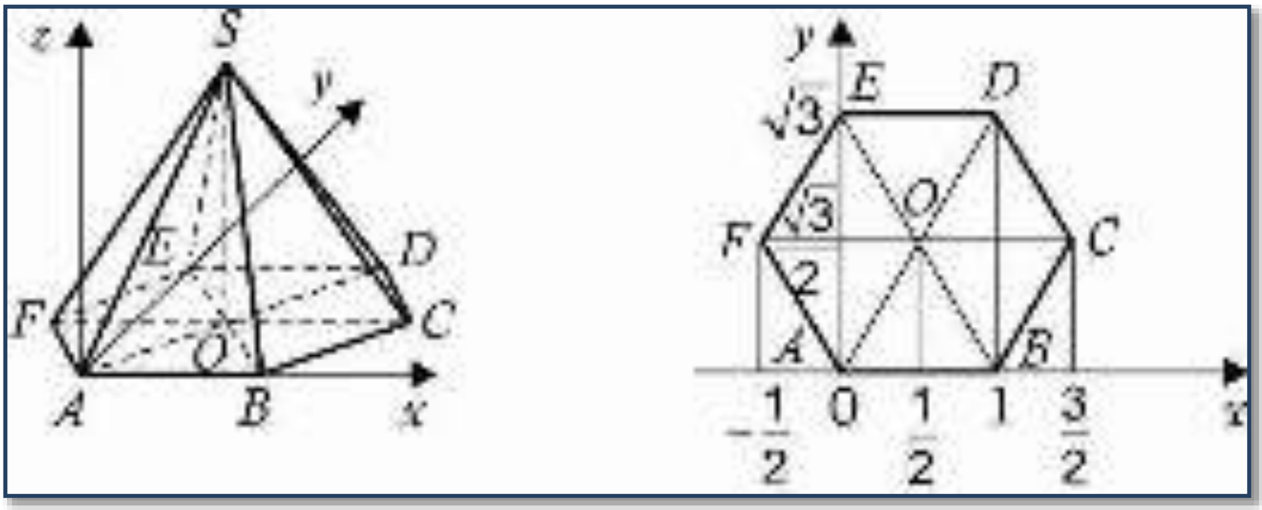
5. ***Правильная четырехугольная пирамида SABCD, все ребра которой равны 1.***



Координаты вершин:

A (0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0), D(0,1,0), S(0,5;0,5;$\frac{\sqrt{2}}{2}$).

6. ***Правильная шестиугольная пирамида SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2.***



Координаты вершин:

A (0,0,0), B(1,0,0),C(1,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$,0), D(1, $\sqrt{3}$, 0), E(0, $\sqrt{3}$, 0), F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0),

S(0,5;$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$).

§2. Нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку. Градусная мера угла располагается в диапазоне от 0˚ до 90˚.

Данный угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами. Таким образом, если нам удастся найти координаты направляющих векторов a (x_1; y_1; z_1) и b (x_2; y_2; z_2), то сможем найти угол. Точнее, косинус угла по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

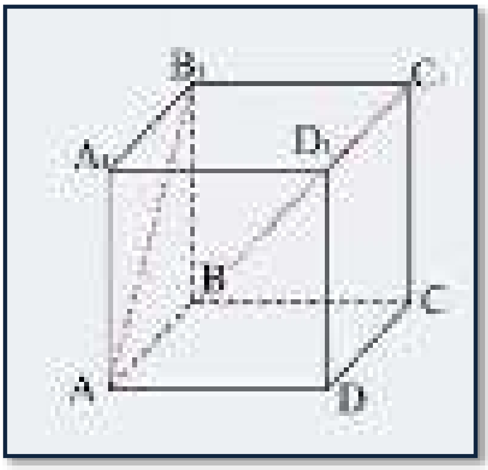
Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов векторов
4. Находим координаты Векторов
5. Подставляем в формулу "косинус угла между векторами"
6. После чего (если требуется в задаче), зная косинус, находим значение самого угла.

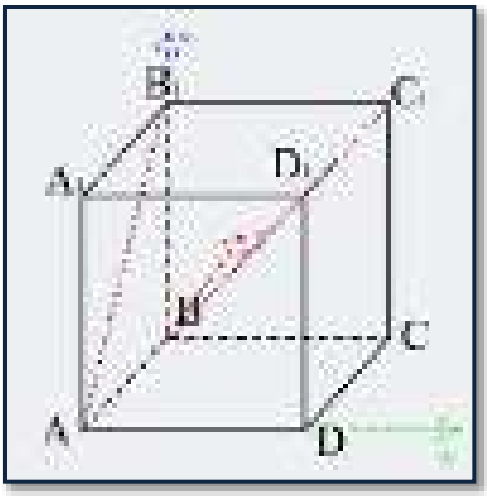
Для того чтобы лучше понять алгоритм решения данных типов задач, рассмотрим решение одной из них.

Задача 2.1

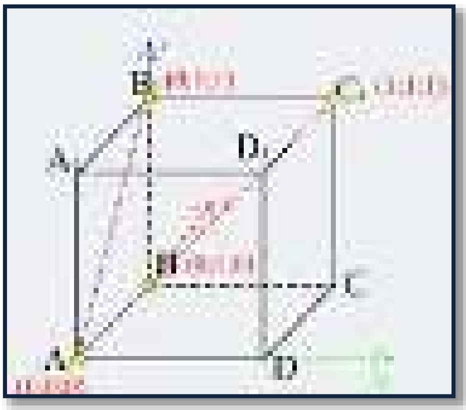
В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямымиAB$_1$ и BC$_1$.



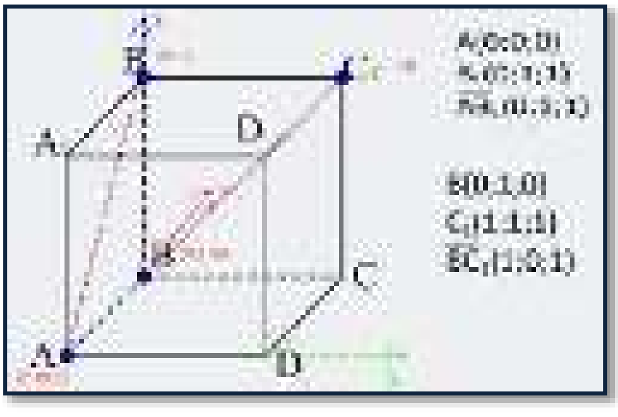
Впишем куб в систему координат как показано на рисунке



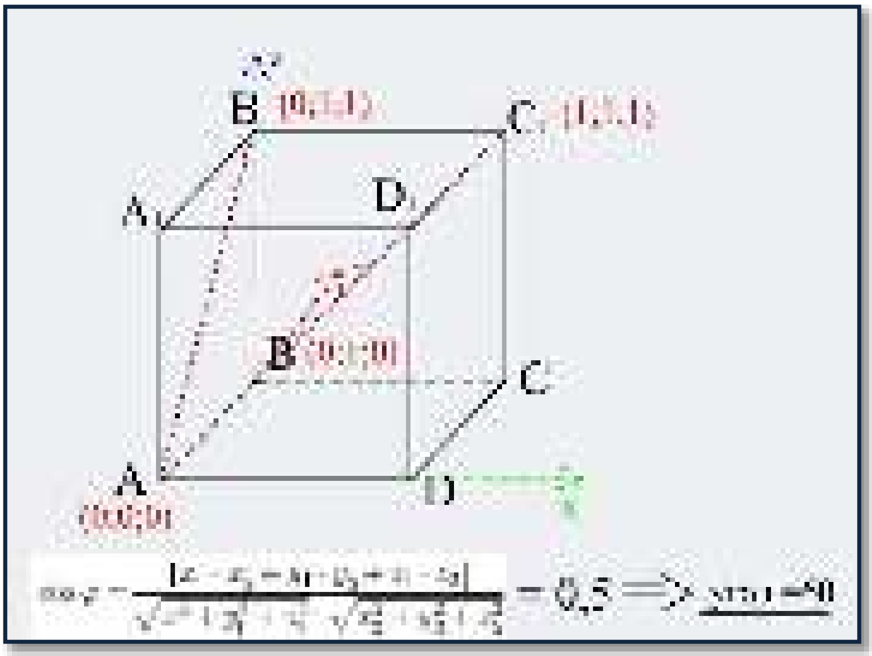
Найдем координаты концов отрезков.



Найдем координаты векторов

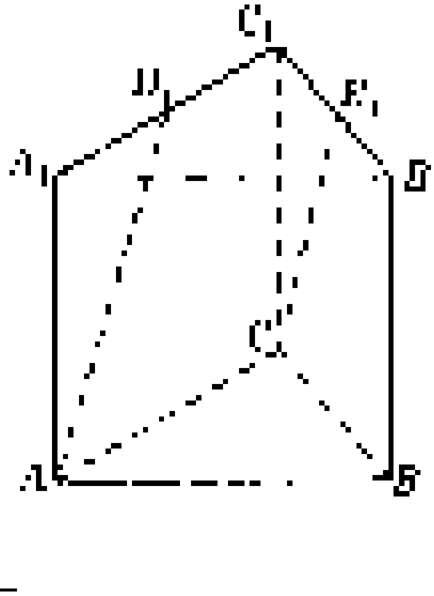


Найдем косинус угла.



Рассмотрим еще четыре задачи.*

1.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.



*Здесь и далее приведены тексты задач из сборника ЕГЭ 2012. Математика. Задача С2. Смирнов В.А.

Решение:

1) Координаты точек задающих прямые, указанные в условии задачи

A (0,0,0),$D_1(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1)$,$C(0,5;\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $E_1(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4},1)$.

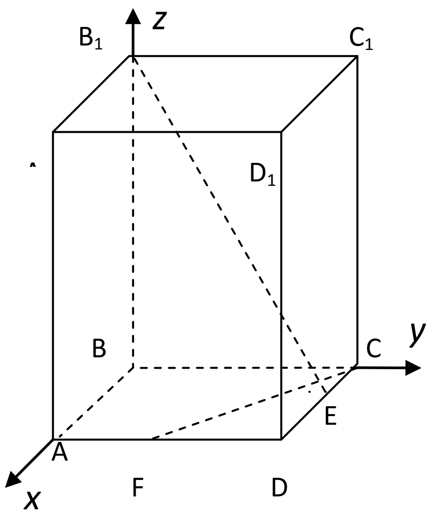
2) Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AD_1}\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$ и $\overrightarrow{CE_1}\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$

3) Найдем косинус угла между векторами $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+1}}$ =0,7;

Ответ: 0,7.

Задача 2.2

Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1\ D_1$ равна 2, высота — 4. Точка *E* — середина отрезка *C*D, точка *F* — середина отрезка *A*D. Найдите угол между прямыми *CF* и B_1E.



Решение.

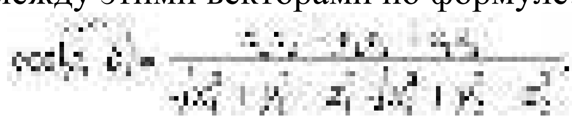
Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

Выпишем координаты точек B_1, E, C, F в этой системе координат:

B_1 (0; 0; 4), *E*(1; 2; 0), *C*(0; 2; 0),

F (2; 1; 0).

Тогда $\overrightarrow{CF}$ (2; -1; 0), $\overrightarrow{B_1E}$ (1; 2; -4). Найдём угол между этими векторами по формуле:



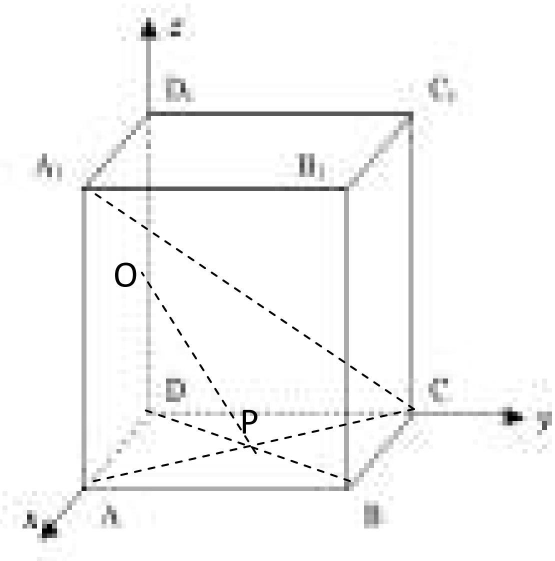
$$cos\alpha = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}} = 0$$

То есть искомый угол α=90˚.

Ответ: 90˚.

Задача 2.3

Точка *O* лежит на ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка *P* является точкой пересечения диагоналей грани *ABCD*. $DO : DD_1 = 1 : 5$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины *C*.



Решение.

Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Условно обозначим грани куба за единицу. Если обозначить её какой-либо буквой, она всё равно сократится. Определим координаты точек P, O, C и A_1:

P(0,5; 0,5; 0), O(1; 1; 0,5),

C(0; 1; 0), A_1(1; 0; 1).

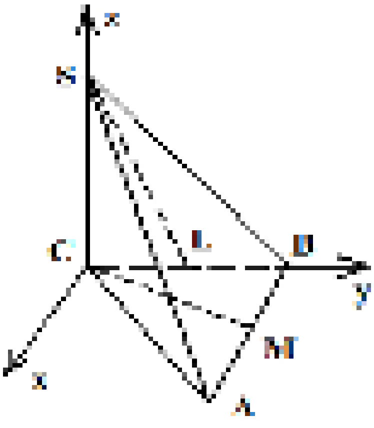
Отсюда $\overrightarrow{OP}\{-0{,}5;-0{,}5;-0{,}2\}, \overrightarrow{A_1C}\{-1;1;1\}$

$$cos\alpha = \frac{|0{,}5\cdot 1 - 0{,}5\cdot 1 - 0{,}2\cdot 1|}{\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}2^2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Задача 2.4

Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и и середину ребра DC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.



Решение.

Поместим пирамиду в декартову систему координат.

Найдём координаты точек S, L, C и M: S(0;0;1), L(0; $\sqrt{2}$;0), C(0;0;0). Чтобы найти координаты точки M, воспользуемся геометрией: в равностороннем треугольнике все углы равны 60˚, а т. М, которая делит сторону АВ пополам, является не только медианой, но и биссектрисой, поэтому $\angle ACM = \angle MCB = 30°$.

Для равностороннего треугольника $h = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, x(CM)=CM·cos60˚=$\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, y(CM)=CM·cos30˚=$\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$,

$\overrightarrow{CM}$ {$\frac{\sqrt{6}}{4}$;$\frac{3\sqrt{2}}{4}$;0}, SL{0;$\sqrt{2}$;-1}

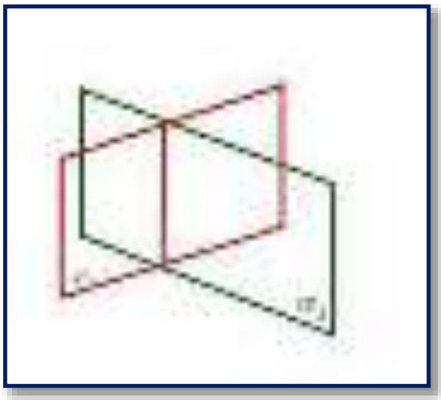
Решая аналогично предыдущим примерам, находим, что $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 45˚**.**

§3. Нахождение угла между плоскостями.

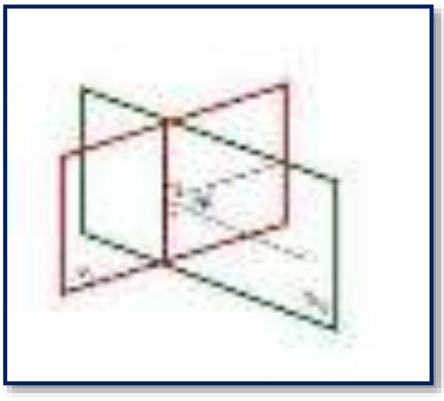
Прежде чем переходить к алгоритму решения данного типа заданий вспомним, что же является углом между плоскостями.

Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов:



Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.

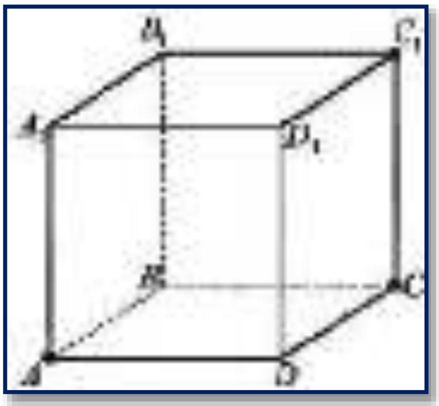
Чтобы построить линейный угол двугранного угла, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла.



В высшей математике есть такое правило, которое позволит нам с легкостью решать задания данного типа методом координат. Угол между двумя плоскостями в пространстве равен модулю угла между нормалями к этим плоскостям.

Таким образом, если мы найдем координаты вектора нормали, то мы воспользовавшись ранее известной формулой косинуса угла между векторами найдем искомый угол. Казалось бы, после прочтения все должно быть сразу понятно, но в школьном курсе почти не проходится понятие ***"нормали"***. Что же это такое?

Нормаль — это прямая, перпендикулярная касательному пространству. Нагляднее всего нормаль лучше всего видна в кубе. Для плоскости основания (ABCD) нормалью являются ребра AA1, BB1, DD1 и CC1; для плоскости DD1C1C - AD, CB, A1D1 и C1B1 и т.д.



Так же нужно понять, что вектор нормали к плоскости, заданной уравнением Ax+By+Cz+D=0 имеет координаты $\vec{n}\{A;B;C\}$

Для составления уравнения плоскости можно использовать определитель третьего порядка, который можно посчитать правилом Саррюса.

Итак, допустим у нас есть плоскость проходящая через точки

$$M_1(x_1;y_1;z_1) \qquad M_2(x_2;y_2;z_2) \qquad M_3(x_3;y_3;z_3)$$

Уравнение этой плоскости в координатной форме будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Данное уравнение записано с помощью матрицы (математического объекта, в виде прямоугольной таблицы элементов, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.).

Чтобы составить уравнение нам нужно найти **определитель** третьего порядка (кол-во строк = кол-ву столбцов; для неквадратных матриц понятие определителя не вводится.) Более понятным языком нам нужно найти **многочлен (который и будет задавать уравнение плоскости в привычном виде) от элементов квадратной матрицы с помощью специальных правил.** (Мы рассмотрим лишь одно, на наш взгляд наиболее удобное правило Саррюса)

Ниже представлено, как найти определитель третьего порядка по правилу Саррюса, составить уравнение плоскости и найти вектор нормали.

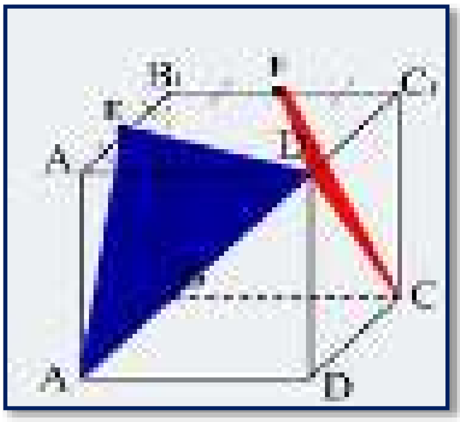
После того, как мы нашли координаты векторов нормалей двух плоскостей, угол между двумя пересекающимися плоскостями можно вычислить как угол между нормалями по формуле $cos\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $\overrightarrow{n_1}\{A_1;B_1;C_1\}$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overrightarrow{n_2}\{A_2;B_2;C_2\}$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Для того, чтобы лучше понять алгоритм решения данных типов задач, лучше рассмотреть решение самых простых из них. Ниже будут приведены решения именно таких заданий.

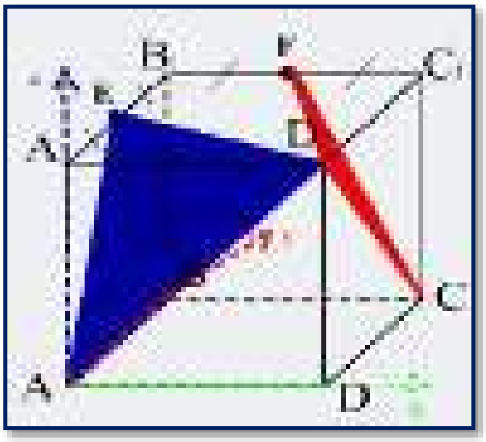
Задача 3.1

В единичном кубе A...D1 найдите угол между (AD1E) и (D1FC), где E и F середины ребер A1B1 и B1C1 соответственно.

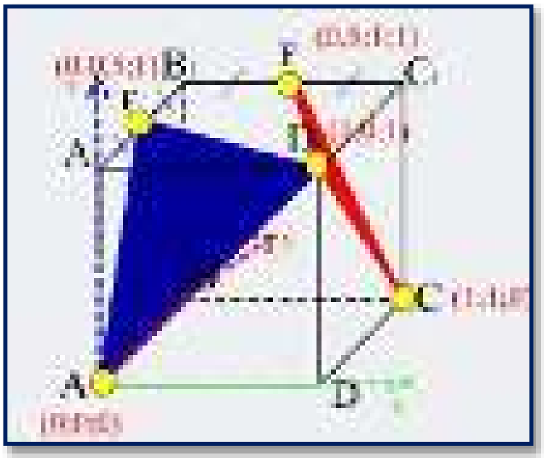
Решение.



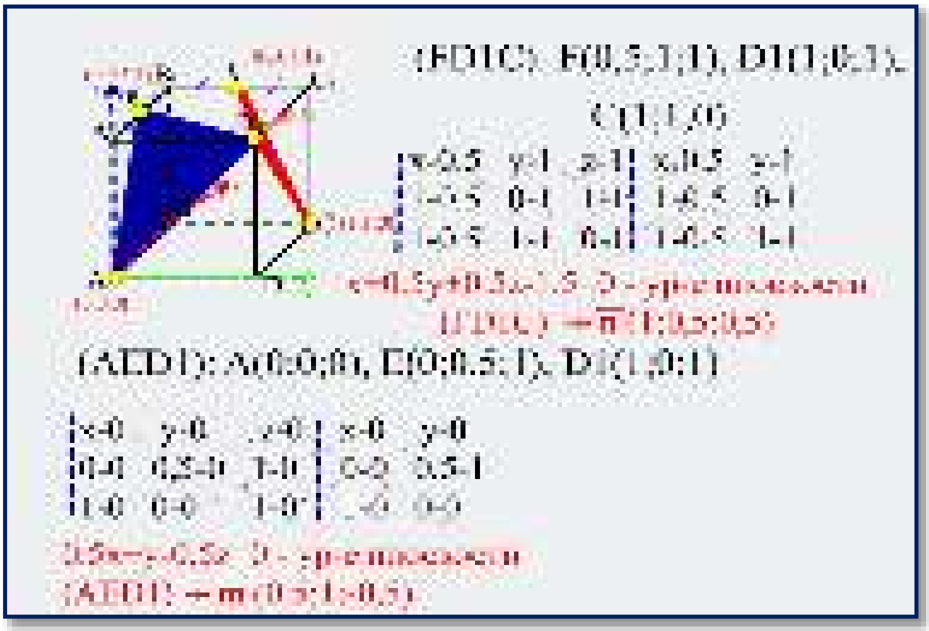
Впишем куб в систему координат.



Найдем координаты точек, задающих указанные плоскости.



Составим уравнения плоскостей и найдем координаты векторов нормалей к ним:

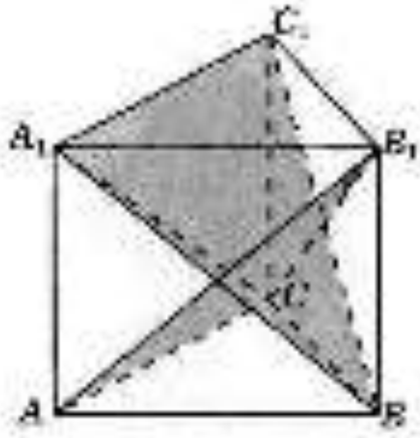


Найдем косинус угла между плоскостями

Ответ: 60°

Задача 3.2

3.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.



Решение.

1) Координаты A(0,0,0), $B_1(1,0,1)$, $C(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0)$, найдем уравнение плоскости (AB_1C).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0{,}5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0$ т.е $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}z=0$

координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

2).Координаты $A_1(0,0,1)$, B (1,0,0), $C_1\ (\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1)$,

найдем уравнение плоскости (A_1BC_1).

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 1 \\ 0{,}5 - 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 & 1 - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, т. е $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$

координаты вектора нормали

$\vec{m}(\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$ и $\vec{n}(\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

3).Найдем косинус угла между плоскостями (AB_1C)и (A_1BC_1):

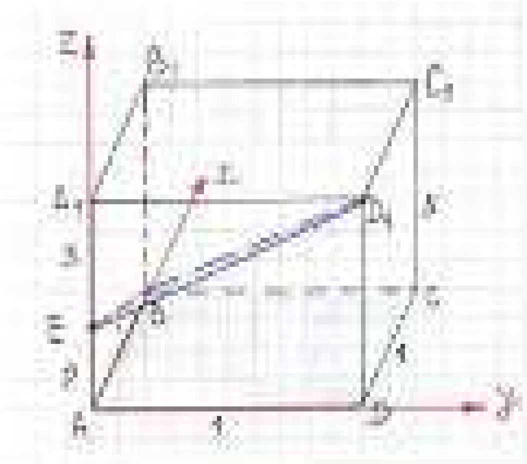
$\cos\alpha = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - 1\cdot 1 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}|}{|\sqrt{3+1+3}|\cdot|\sqrt{3+1+3}|} = \frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Задача 3.3

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.



Введем прямоугольную систему координат. Тогда $B(1;0;0)$, $E(0;0;2)$, $D_1(0;1;5)$.

Составляем уравнение плоскости (BED_1). $-x+1{,}5y-0{,}5z+1=0$, вектор нормали плоскости (BED_1) $\vec{n}_1\{-1;1{,}5;-0{,}5\}$

Вектор нормали плоскости (ABC) $\vec{AA_1} = \vec{n}_2\{0;0;5\}$

Найдем искомый угол как угол между нормалями плоскостей

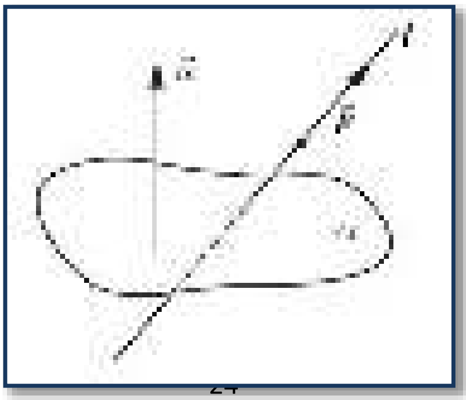
$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot(-1) - 0\cdot 1{,}5 - 5\cdot(-0{,}5)|}{\sqrt{0+0+5^2}\cdot\sqrt{1^2-(1{,}5)^2+(-0{,}5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}},\ \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}$.

§4. Нахождение угла между прямой и плоскостью

Прежде чем переходить к алгоритму решения данного типа заданий вспомним, что же является углом между прямой и плоскостью.

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.



Итак, для того чтобы найти угол между прямой и плоскостью методом координат нам понадобиться формула:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$$ или

$$\sin\phi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}, \text{ где}$$

$\vec{n}\{x_1;y_1;z_1\}$ - вектор нормали к плоскости α,

$\vec{p}\{x_2;y_2;z_2\}$ - направляющий вектор прямой l.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

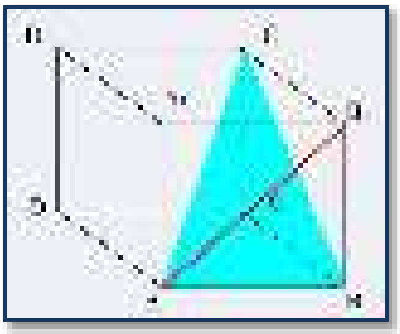
1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямую и плоскость (прямой придаем направление, т.е. вектор)
2. Вписываем фигуру в систему координат
3. Находим координаты концов направляющего вектора.
4. Находим координаты вектора (рассмотрено ранее)
5. Находим координаты вектора нормали к плоскости(рассмотрено ранее)
6. Подставляем в формулу "синус угла между прямой и плоскостью"
7. После чего (если требуется в задаче), зная синус, находим значение самого угла.

Для того чтобы лучше понять алгоритм решения данных типов задач, рассмотрим решение некоторых из них.

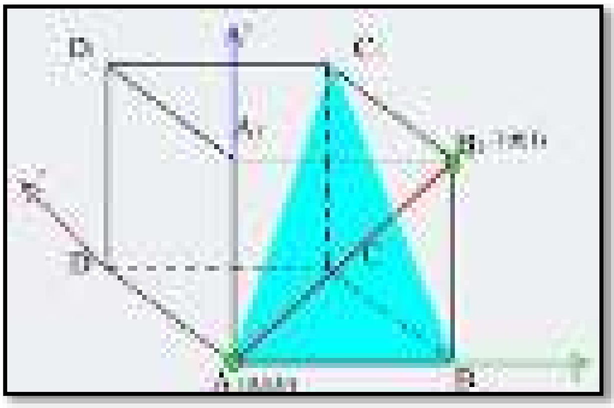
Задача4.1

Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой AB_1и плоскостью ABC_1.

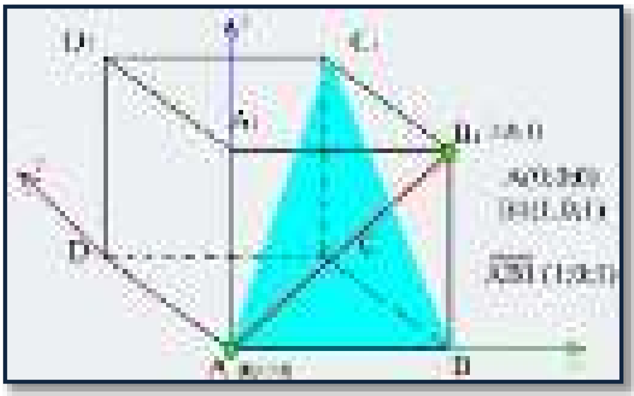
Решение.



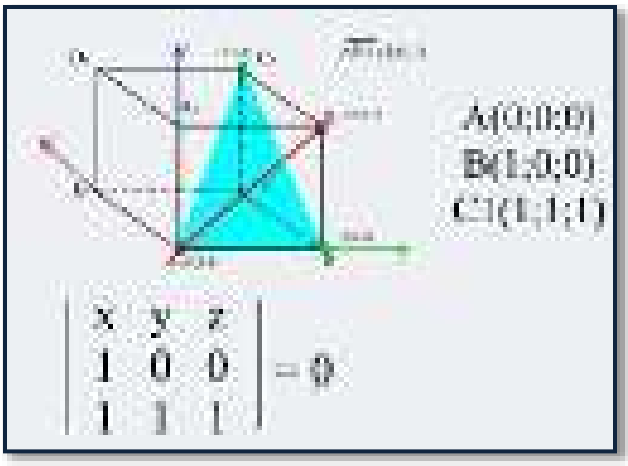
Впишем куб в систему координат как показано на рисунке.



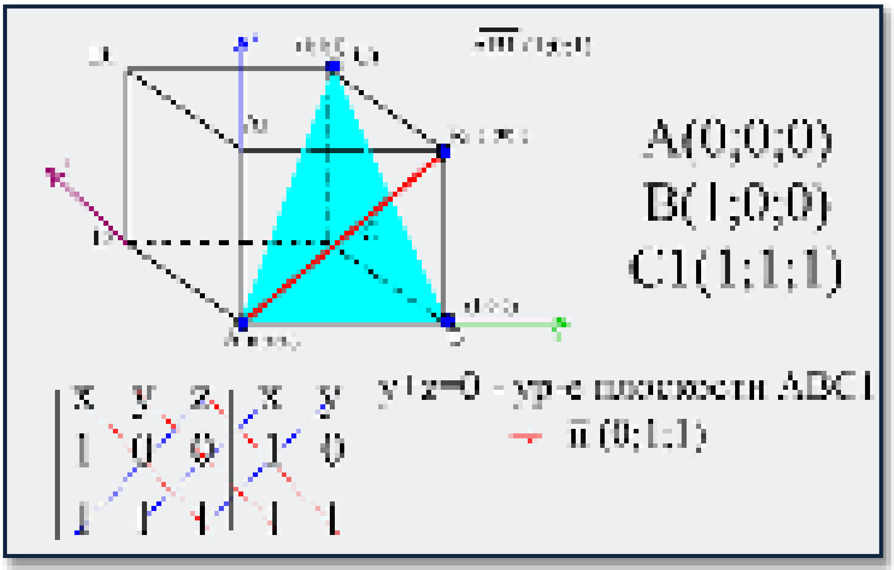
Найдем координаты концов отрезка AB_1 и координаты вектора AB1



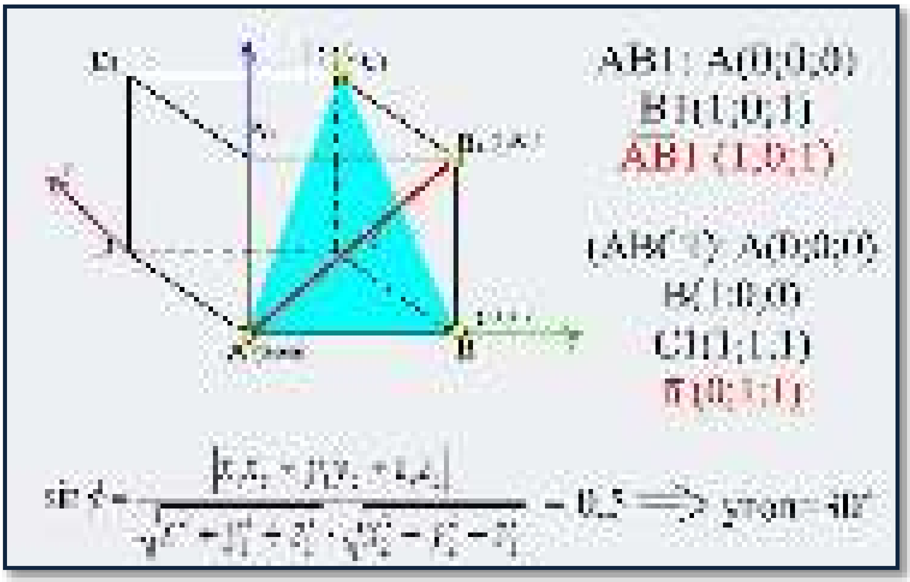
Составим уравнение плоскости.



Воспользуемся правилом Саррюса.



Найдем синус угла.

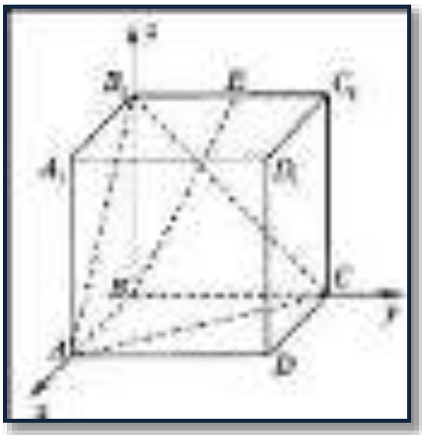


Ответ: 30˚

Задача 4.2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD=2$. Точка E – середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB_1C.

Решение.



Для решения этой задачи необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через точки

A(1; 0; 0), $B_1(0;0;1)$, C(0;2;0). Уравнение искомой плоскости будет иметь вид: *2x+y+2z-2=0*. Значит, нормаль n к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}\{2;1;2\}$

Длину вектора $\overrightarrow{BE}$ легко найти геометрически: $\left|\overrightarrow{BE}\right| = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}$. Но его координаты нам всё равно необходимы. Из простых вычислений находим, что $\overrightarrow{BE}\{0;-1;-1\}$.

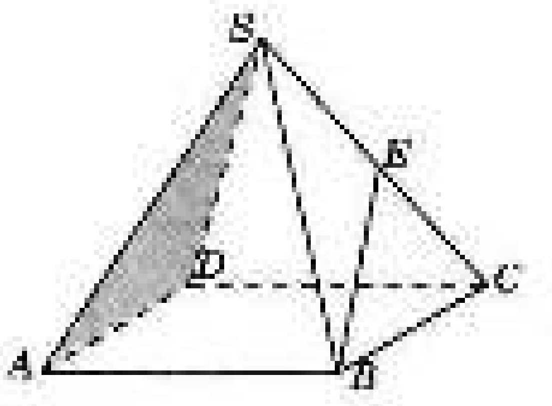
Найдем угол между вектором $\overrightarrow{BE}$ и нормалью к плоскости по формуле скалярного произведения векторов:

$$\sin\phi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|-1\cdot 1 - 1\cdot 2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

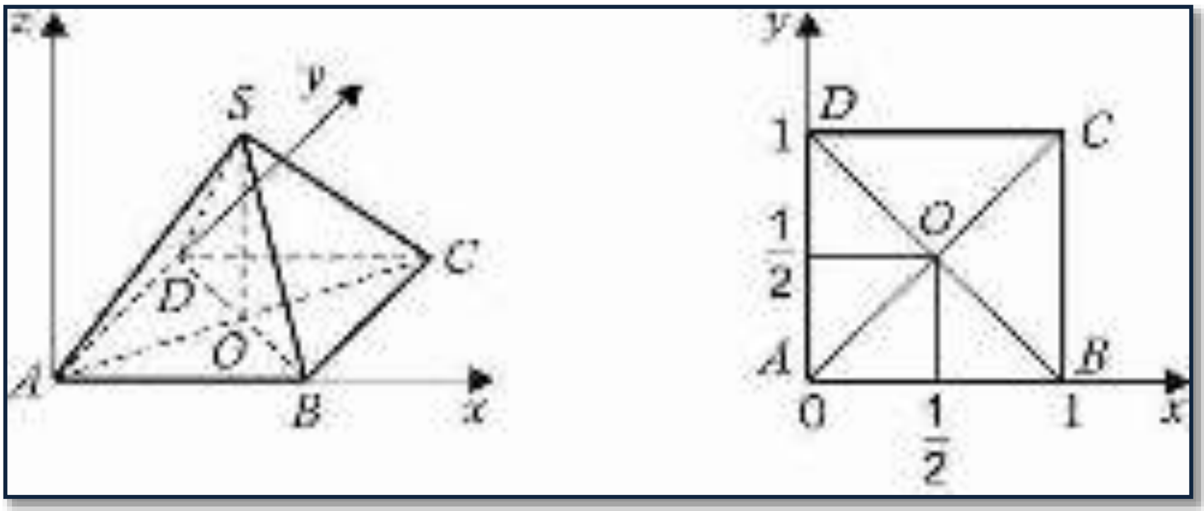
Ответ: 45°

Задача 4.3.

2.3. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой *BE* и плоскостью *SAD*, где *E* — середина ребра *SC*.



Решение.



1) Координаты точек B (1,0,0), E $(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$; вектора $\overrightarrow{BE}$ $(\frac{-1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$.

2) Составим уравнение плоскости (ADS), учитывая, что A(0,0,0), D(0,1,0), S$(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \\ 0{,}5-0 & 0{,}5-0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ x- $\frac{1}{2}$ z=0, координаты вектора нормали $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0;-\frac{1}{2})$;

$$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{3};$$

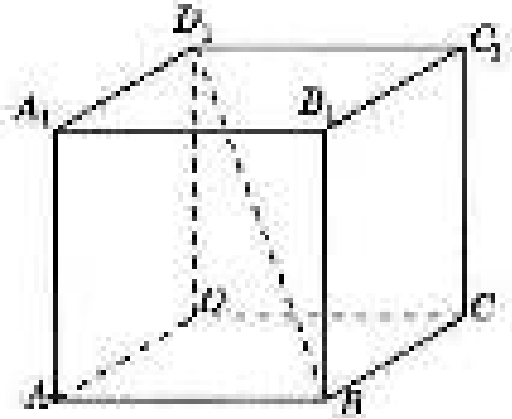
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

§5. Нахождение расстояния от точки до прямой.

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую.

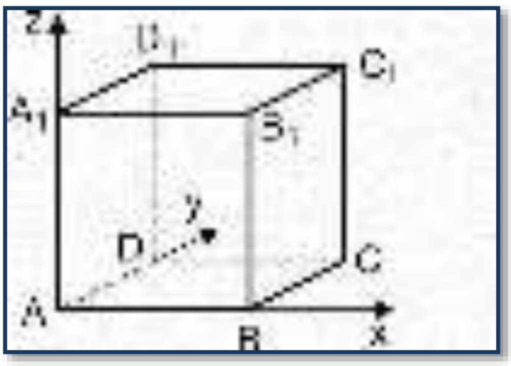
Задача 5.1

4.2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



Решение.

1) Поместим куб в прямоугольную систему координат как показано на рисунке.



2) Координаты A(0,0,0),B(1,0,0), D_1(0,1,1), $\overrightarrow{BD_1}$(-1;1;1)

3) Проведем AK перпендикулярно BD1

Если отрезок, концами которого служат точки A(x_1,y_1, z_1),B(x_2,y_2, z_2) разделен точкой K(x,y, z) в отношении λ, то координаты точки K определяются по формулам

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

$x=\frac{1+0}{1+\lambda}$; $y=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}$; $z=\frac{0+\lambda}{1+\lambda}$, значит К $\left(\frac{1+0}{1+\lambda};\ \frac{0+\lambda}{1+\lambda};\ \frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right)$;).

$\overrightarrow{АК}=\left(\frac{1+0}{1+\lambda};\ \frac{0+\lambda}{1+\lambda};\ \frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right)$

4) Так как вектор АК перпендикулярен вектору BD1, то

$\overrightarrow{АК} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0$

$-\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0$,

$\frac{2\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}$;

$\lambda = \frac{1}{2}$;

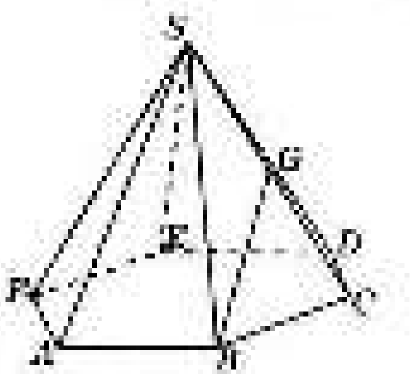
$К\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3). $\overrightarrow{АК}\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, значит $\left|\overrightarrow{АК}\right| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

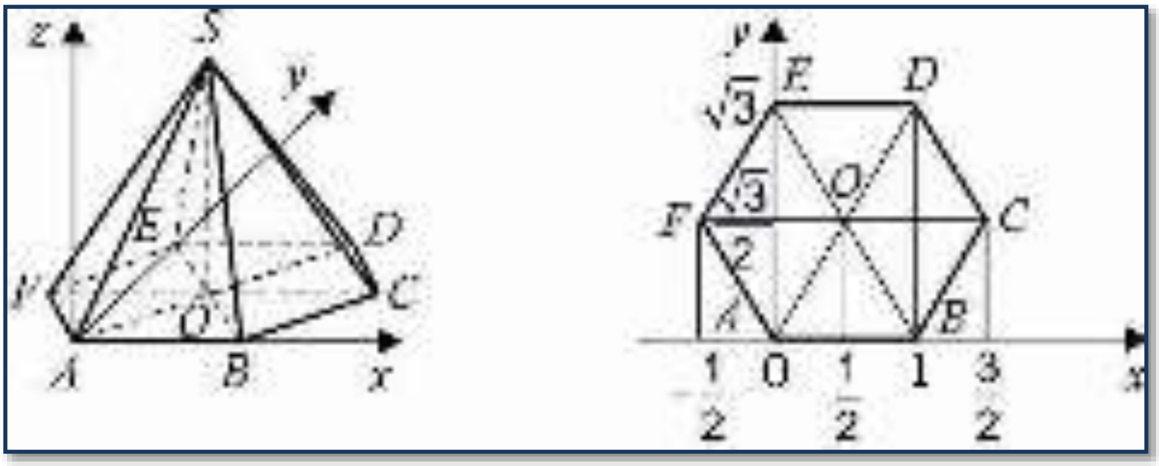
Задача 5.2

4.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G — середина ребра SC.



Решение.

1) Поместим пирамиду в систему координат как показано на рисунке.



2) Координаты вершин: B(1,0,0), F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0), G(1;$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$), $\overrightarrow{B\mathbf{G}}$(0; $\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$; $\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$)

3) Проведем FK перпендикулярно BG. Если отрезок, концами которого служат точки A(x_1,y_1, z_1),B(x_2,y_2, z_2) разделен точкой К(x,y, z) в отношении λ, то координаты точки К определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

$x=\frac{1+\lambda}{1+\lambda}$; $y=\frac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$; $z=\frac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$, значит К $\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda};\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda};\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}\right)$

$\overrightarrow{\mathbf{F}К}$ $\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}+0{,}5;\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}};\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}\right)$

4). $\overrightarrow{\mathbf{F}К}\cdot\overrightarrow{B\mathbf{G}}=0$

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}=0;$$

λ=1 ;

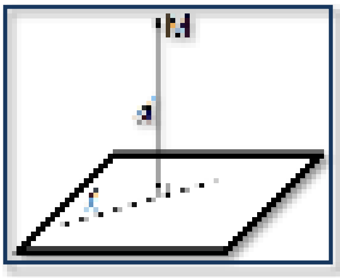
К$\left(1;\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

5). $\overrightarrow{\mathbf{F}К}=\left(1{,}5;-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, значит $\left|\overrightarrow{\mathbf{F}К}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{21}{8}}=\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$

§6. Нахождение расстояния от точки до плоскости

Для начала выясним, что называется расстоянием **от точки до плоскости.** *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



Итак, для того, чтобы найти расстояние от точки до плоскости нам необходимо найти координаты точки, и координаты нормали данной плоскости. После чего воспользоваться следующей формулой:

$$\rho(M;\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

где $M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость α задана уравнение $ax+by+cz+d=0$.

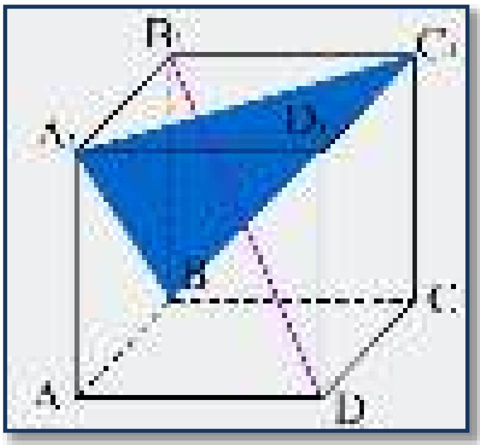
Алгоритм решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости:

1. На рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора).
2. Вписываем фигуру в систему координат.
3. Находим координаты точек (данной и трех точек плоскости).
4. Составляем уравнение плоскости .
5. Находим координаты вектора нормали плоскости.
6. Подставляем в формулу "расстояние от точки до плоскости"

Для того, чтобы лучше понять алгоритм решения данных типов задач, рассмотрим некоторые задачи.

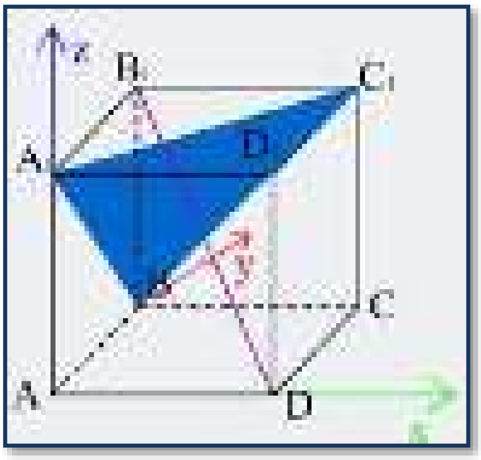
Задача 6.1

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональ B_1D. В каком отношении, считая от вершины B_1, плоскость A_1BC_1 делит диагональ B_1D?

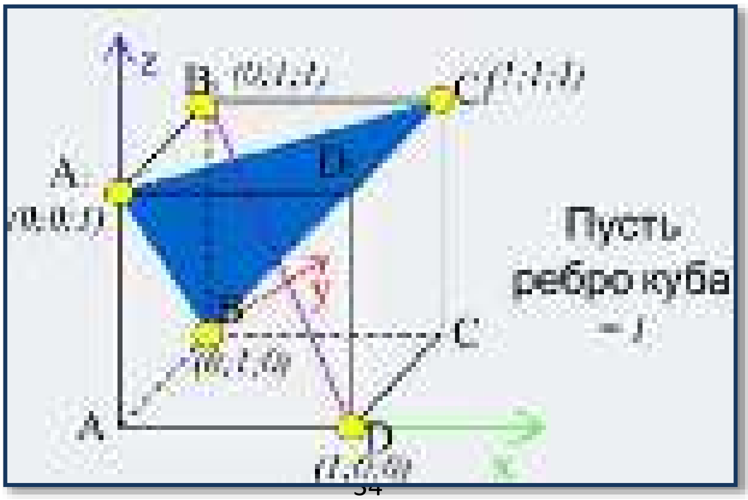


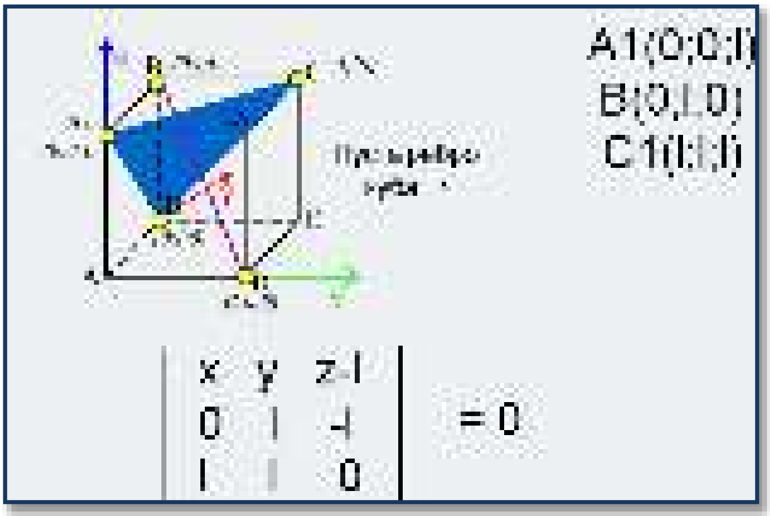
Решение.

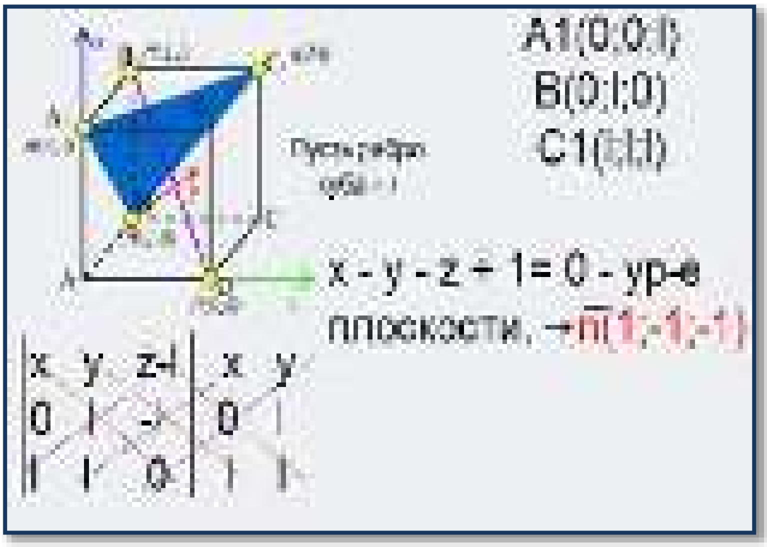
Впишем куб в систему координат как показано на рисунке.



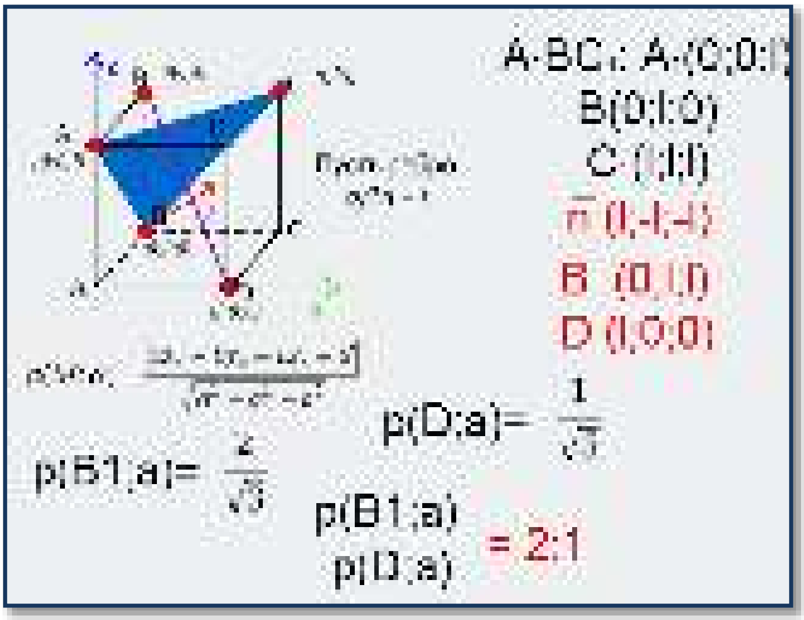
Найдем координаты точек. Составим уравнение плоскости.







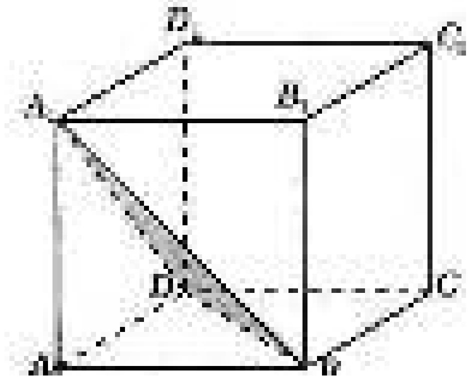
Найдем расстояние от точек до плоскости.



Ответ: 2:1

Задача 6.2

5.1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1 .



Решение.

1) A (0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), D(0 ,1 ,0)
2) Координаты A_1(0,0,1), B(1,0,0), D(0 ,1 ,0), составим уравнение плоскости (A_1BD).

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости:

$x + y + (z-1) = 0$ т.е $x + y + z - 1 = 0$ значит, координаты вектора нормали $\vec{n}(1,1,1)$.

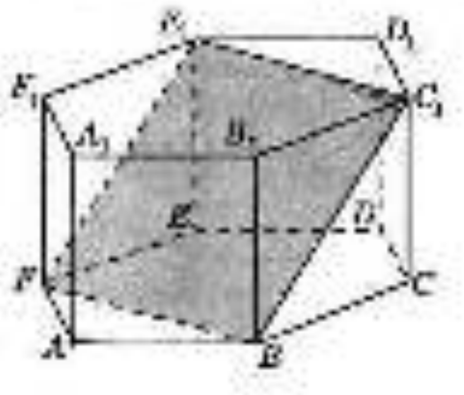
3) Найдем расстояние от точки A до плоскости (A_1BD)

$$\rho=\frac{|A_0\cdot x+B_0\cdot y+C_0\cdot z+D_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$**.**

Задача 6.3

5.3. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1



Решение.

1) Координаты вершин: A (0,0,0), B(1,0,0), $E_1(0, \sqrt{3}, 1)$, F(-05, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0), найдем уравнение плоскости (E_1BF).

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 1 & \sqrt{3} - 0 & 1 - 0 \\ -0{,}5 - 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ -1{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости:

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (X-1) -1,5y $+ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1{,}5 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot z = 0$ т.е $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 1{,}5y + \sqrt{3}z - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, значит координаты вектора нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; -3; 2\sqrt{3})$.

3) Найдем расстояние от точки А до плоскости(A_1BD)

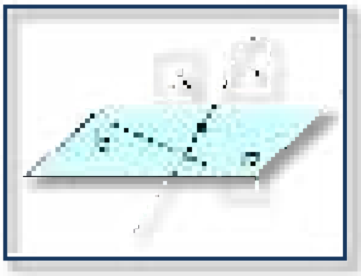
$$\rho = \frac{|A_0 \cdot x + B_0 \cdot y + C_0 \cdot z + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 0 - \sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

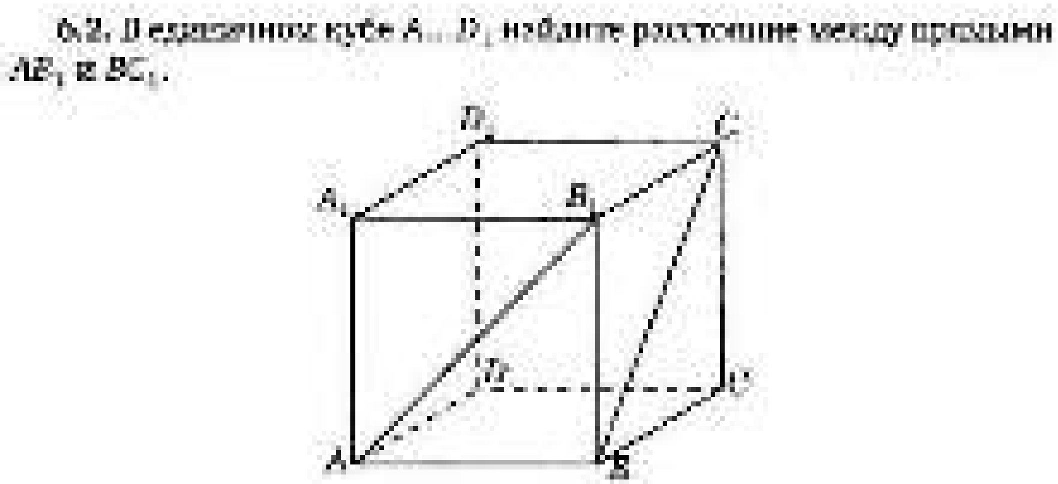
§7. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из скрещивающихся прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



Задача 7.1



Решение.

1) Координаты A(0,0,0), B1(1,0,1), B(1,0,0),C1(1,1,1).

2) Точка К лежит на BC_1, $\overrightarrow{BC_1}(0;1;1)$

Если отрезок, концами которого служат точки A(x_1, y_1, z_1),B(x_2, y_2, z_2) разделен точкой К(x, y, z) в отношении λ, то координаты точки К определяются по формулам

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

$x = \frac{1+\lambda}{1+\lambda}$; $y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}$; $z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}$, значит К $\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$; пусть $q = \frac{\lambda}{1+\lambda}$,значит

К(1, q, q)

3) A(0,0,0), B1(1,0,1). Точка М лежит на AB_1, $\overrightarrow{AB_1}(1;0;1)$

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1, y_1, z_1)$,$B(x_2, y_2, z_2)$ разделен точкой $M(x,y, z)$ в отношении μ, то координаты точки M определяются по формулам

$x = \frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu}$; $y=\frac{y_1+\mu y_2}{1+\mu}$; $z = \frac{z_1+\mu z_2}{1+\mu}$.

$x=\frac{0+\mu}{1+\mu}$; $y=\frac{0+0\cdot\mu}{1+\mu}$; $z=\frac{0+\mu}{1+\mu}$, значит $M\left(\frac{\mu}{1+\mu};0; \frac{\mu}{1+\mu}\right)$; пусть $p= \frac{\mu}{1+\mu}$,

тогда $M(p,0,p)$; $\overrightarrow{KM} = (p-1;0-q;p-q)$

4).$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$;

$\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{KM} =0$;

$$\begin{cases} -q+p-q=0, \\ p-1+p-q=0, \end{cases}$$

решив систему, имеем $p=\frac{2}{3}$; $q=\frac{1}{3}$.

5) $\overrightarrow{KM}\ (-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, значит расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 равно $|\overrightarrow{KM}|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Мнения о методе координат

(орфография, пунктуация и лексика авторов сохранена)

1) Очень – очень советую освоить координатный, вряд ли будет что-то такое, что координатным не решить! Меня км спасал не один раз. (Пользователь esclade279. Форум http://abiturient.pro)
2) С2 обычно до ужаса простая задача, которая решается в 50% случаев в уме. Так что метод координат тут не рационален. С4 иногда можно порешать этим методом, но чаще нет. (Пользователь Hellko. Форум http://forum.postupim.ru)
3) Чтобы успешно решить С2, нужно разобраться в одном универсальном способе: - координатный способ. Все длины, углы легко находятся. - бывший абитуриент, ныне студент (Пользователь delpaNz. Форум http://abiturient.pro)
4) Ребят, решайте координатным методом С2! Так без особых знаний можно решить почти любую задачу.(Пользователь 777Julia777 http://forum.postupim.ru)
5) А почему бы учителям не научить абитуру считать определители 3-го порядка? Тогда задача на нахождение расстояния от точки до прямой и мкжду прямыми из суперсложной и недоступной многим геометрической задачи становится простой арифметической задачкой, где главное – не наврать в счете. Конечно, ваше учительское сердце протестует против этого, стремясь всех научить геометрическим методам, но результат +2 балла все таки наиболее вероятен во втором случае. Да и в универе нет чистой геометрии, только аналитическая.(Пользователь Марина http://www.alexlarin.com)

Источники информации

1. Автономова, Т. В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: Книга для учителя [Текст]/ Б. И. Аргунов – М.: Просвещение, 2001. - 127с.
2. Борзенко Е.К., Корнева И.Г. Решение стереометрических задач: Методические рекомендации. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2005. – 60с.
3. Габович И., Горнштейн П. Вооружившись методом координат// Квант. – 2009. - №11. – с. 42 – 47.
4. Гельфанд И.М. Глаголева Е.Г., Нириллов А.А. Метод координат. – М.: Наука, 2007.
5. Глаголев, Н. А. Элементарная геометрия: стереометрия для 10-11 кл. ср. шк. в 2ч. – М.: Просвещение, 2008. – ч. 2.
6. Готман Э.Г. Скопец З.А., Решение геометрических задач аналитическим методом. – М.: Просвещение, 2009.
7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
8. Игошин В.И. Аналитическая геометрия. - Саратов: Наука, 2007.
9. Каталог задач // URL: www.problems.ru
10. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012: учебно-методическое пособие/ под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Калабухова. – Ростов-на-Дону: Легион – М., 2011.
11. Новые компьютерные технологии. Координатная плоскость // Математика - Приложение к газ. «Первое сентября» - 2004г. №29
12. Нужна ли школе XXI века геометрия /И. Шарыгин // Математика - Приложение к газ. «1 сентября» - 2004г. №12
13. Образовательный портал «Физ/мат класс» URL: www.fmclass.ru
14. Открытый банк заданий // URL: www.mathege.ru
15. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2012: Математика /авт.-сост . И.Р.Высоцкий, Д.Д.Гущин, П.И.Захаров и др.; под ред. А.Л.Семенова, И.В.Ященко. – М.: АСТ: Астрель , 2012. – (ФИПИ).
16. Федеральный институт педагогических измерений// URL: www.fipi.ru/

Оглавление.

Данная брошюра является дополнением к интерактивному экспресс курсу «Решаем С2 на отлично», размещенному на сайте: http://c2shkola34.jimdo.com

Замечания присылайте по адресу: ecsponenta@mail.ru

Выпускник 2013 года